1.3.1 Un paradoxe de Jakob Bernoulli

Exercice 1.2 *En 1692, le célèbre mathématicien Jakob Bernoulli note que :*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1 - 1/2} = 2,$$

et divise cette égalité successivement par 1, 3, 5, *etc. pour obtenir :*

$$(*) \qquad \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + ... = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + ... = \frac{2}{5} \\ ... \end{array}$$

Il ajoute ensuite ces égalités membre à membre pour obtenir :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ...\right), \qquad (\dagger)$$

puisque tout entier naturel s'écrit de façon unique comme le produit d'une puissance de 2 *par un nombre impair, ce qui explique que l'on obtienne bien la série harmonique* $\sum 1/n$ *au premier membre. De* ($\dagger$) *on tire évidemment :*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + ... = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ...$$

alors même que chaque terme de la série du membre de gauche est strictement inférieur au terme correspondant du membre de droite. En faisant passer le membre de gauche dans le membre de droite, on obtiendrait aussi :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + ... = 0$$

ce qui est impossible puisque le membre de gauche est visiblement strictement positif !

Solution — Cet exemple est tiré du Godement ([1] p. 86). Le développement proposé est déconcertant car on n'emploie que des transformations d'équations bien connues quand on travaille avec des nombres réels. Mais c'est là où le bas blesse : certaines séries utilisées dans ces calculs sont divergentes, c'est-à-dire ne convergent pas dans $\mathbb{R}$. On ne peut donc pas faire comme s'il s'agissait de nombres réels.

La première série, issue d'une progression géométrique de raison $1/2$, converge, tout comme les séries écrites en $(*)$. Mais ensuite on additionne une infinité d'égalités membre à membre pour obtenir $(\dagger)$, une égalité qui n'a pas de sens dans $\mathbb{R}$ puisque les séries :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \quad \text{et} \quad 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + ...$$

divergent. L'équation $(\dagger)$ signifie donc seulement que $+\infty = +\infty$, ce qui ne permet pas d'aller plus loin. Ecrire : « De $(\dagger)$ on tire évidemment » est donc parfaitement erroné.

Cet exemple montre qu'il faut faire attention quand on manie des sommes infinies. Citons Godement :

> « Les règles usuelles du calcul algébrique ont été inventées pour calculer des sommes finies ; il est parfois légitime de les appliquer aux séries convergentes et presque toujours (...) aux séries absolument convergentes (...), non parce qu'elles sont évidentes, mais parce que les mathématiciens du XIX^{e} siècle ont démontré les théorèmes généraux indispensables. » ([1] p. 86)

Et un peu plus loin :

> « Après ces exemples (...), on comprendra peut être mieux pourquoi les mathématiciens du XIX^{e} siècle et encore plus du XX^{e}, fatigués des démonstrations fausses, par de grands mathématiciens, de théorèmes généralement justes (il y a sûrement aussi d'innombrables théorèmes faux produits par de moindres seigneurs, mais ils ne passent pas à la postérité), ont fini par poser, au moins implicitement, les principes de base suivants :
>
> (i) toute assertion qui n'est pas intégralement démontrée est potentiellement fausse et n'est, au mieux, qu'une conjecture intéressante,
>
> (ii) utiliser une assertion non complètement démontrée pour en prouver d'autres augmente exponentiellement les risques d'erreur,
>
> (iii) c'est à l'auteur d'une assertion qu'incombe la charge de la démontrer même si ses collègues ne se privent pas, à l'occasion, de

le faire à sa place ou de la démolir.
L'observation de ces principes a conduit à la formidable discipline intellectuelle que les mathématiciens se sont imposé depuis un siècle. Elle ne se rencontre à peu près nulle part ailleurs à ce degré ; les vrais historiens tentent de l'appliquer, mais les inévitables lacunes de leur information, la nécessité de contrôler des documents parfois truqués et de les « interpréter » objectivement, rendent la chose difficile. En Physique, les théoriciens prennent fréquemment de grandes libertés avec les mathématiques, les intuitions géniales suffisant ; les expérimentaux, eux, travaillent parfois sur des hypothèses pouvant se révéler fausses. Et imaginez la carrière d'un homme politique qui appliquerait les règles ci-dessus. » ([1] p. 87)